Leçon 106
Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

I - Le groupe linéaire

II - Actions du groupe linéaire

III - Propriétés relatives au corps de base

Dev 1 : Théorème de Lie-Kolchin
Dev 2 : Théorème de Kakutani et sous-groupes compacts de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

I - Le groupe linéaire

1) Sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$: def $\mathrm{SL} \triangleleft \mathrm{GL}$, suite exacte, centre, PGL, PSL, centres, Burnside, matrices de permutation **[Rom21]**
2) Transvections et dilatations : def et propriétés, équivalences, conjugaison **[Rom21]**, **[Per04]**
3) Générateurs : def transvections, dilatations, $<$transvections$>$=SL, $<$transvections, dilatations$>$=GL, pivot de Gauss **[Rom21]**
4) Groupes dérivés : inclusions, égalités, $D(SL_2(\mathbb{F}_2)) \cong \mathfrak{A}_3$, $D(SL_2(\mathbb{F}_3)) \cong \mathbb{H}_8$, $\boxed{\text{dev 1}}$ **[Rom21]**

II - Actions du groupe linéaire

1) Sous-groupes d'isométries : isométries préservent points extrémaux, se ramener au cas linéaire, groupes d'isométries de polygones/triangles/tétraèdre/cube/dodécaèdre, sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ **[CG18]**, **[Rom21]**
2) Action par équivalence : def, orbites, invariant, forme normale **[Rom21]/[CG17]**
3) Action par conjugaison : def, orbites, invariant, forme normale **[Rom21]/[CG17]**
4) Action par congruence : def, orbites, invariant, forme normale, lien formes quadratiques **[Rom21]**
5) Action sur les sous-espaces : def, transitivité, stabilisateurs, dénombrement des matrices nilpotentes/diagonalisables/trigonalisables sur $\mathbb{F}_q$ **[CG18]**

III - Propriétés relatives au corps de base

1) Isomorphismes exceptionnels : cardinaux $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, SL_n, PGL, PSL, isomorphismes exceptionnels **[CG18]**
2) Topologie de $\mathrm{GL}(E)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: def norme triple, GL Banach, ouvert de $\mathcal{L}(E)$, densité, continuité de l'inverse, $\mathrm{O}(E)$ compact, $\boxed{\text{dev 2}}$, pas de petits sous-groupes **[Rom21]**, **[Szp09]**
3) Résultats de connexité : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}_*^+ \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, app : surjectivité de l'exponentielle **[Szp09]**

Références

[CG17] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*. Calvage & Mounet, 2017.

[CG18] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome Second*. Calvage & Mounet, 2018.

[Per04] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipse, 2004.

[Rom21] Jean-Etienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.

[Szp09] A. Szpirglas. *Mathématiques L3 : cours complet avec 400 tests et exercices corrigés. Algèbre*. Pearson Education, 2009.